ENSA-ALHOCEIMA **ANALYSE 4**
CPII. **SEMESTRE 4**

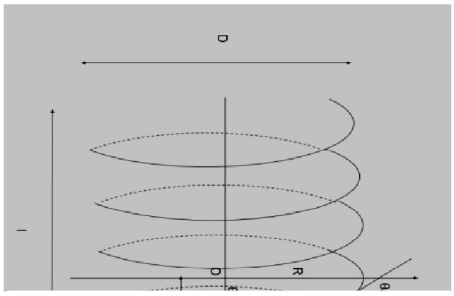
Exercice 4

Soit $\omega = yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz$ *une forme différentielle sur* $\mathbb{R}^3$.
On pose

$$\begin{cases} P(x,y,z) = yz \\ Q(x,y,z) = zx \\ R(x,y,z) = xy \end{cases}$$

1) *Calculons l'intégrale de* ω *le long de l'hélice H paramétrée par :*

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \quad avec\ t\epsilon \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ z(t) = t \end{cases}$$



Posons $h(t) = (\cos t, \sin t, t)$ $\quad avec\ t\epsilon\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$*, donc l'intégrale de* ω *le long de l'hélice H est*

$$\int_H \omega = \int_0^{\frac{\pi}{4}} w(h(t))h'(t)dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} P(h(t))x'(t)dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} Q(h(t))y'(t)dt$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{4}} R(h(t))z'(t)dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} -t\sin^2(t)dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\cos^2(t)dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t\ \sin t dt$$

En utilisant les formules trigonométriques suivantes:

$$\cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos(2t) \quad et \quad \cos t\ \sin t = \frac{\sin(2t)}{2}$$

On trouve

$$\int_H \omega = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\cos(2t)dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2t)}{2}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\cos(2t)dt - \left[\frac{\cos(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\cos(2t)dt + \frac{1}{4}$$

Par une intégration par parties, on pose

$$\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \cos(2t) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = \dfrac{\sin(2t)}{2} \end{cases}$$

Par suite

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\cos(2t)dt = \left[\frac{t\sin(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2t)}{2}dt = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

Finalement,

$$\int_H \omega = \frac{\pi}{8}$$

2)

a) ***Montrons que ω est exacte.***

Comme $D_w = \mathbb{R}^3$ est un ouvert étoilé, alors d'après le théorème de poincaré, il suffit de montrer que w est fermée.

On a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y,z) = z & et & \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z) = z \\ \dfrac{\partial P}{\partial z}(x,y,z) = y & et & \dfrac{\partial R}{\partial x}(x,y,z) = y \\ \dfrac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z) = x & et & \dfrac{\partial R}{\partial y}(x,y,z) = x \end{cases}$$

Donc w est une forme différentielle fermée et par suite exacte.

Déterminons son potentiel f:

La fonction f est une solution du système suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = yz & (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xz & (2) \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = xy & (3) \end{cases}$$

En intégrant (1) par rapport à x, on trouve

$$f(x,y,z) = xyz + k(y,z) \quad (4)$$

Avec k est une fonction en (y,z).
Dérivons cette dernière formule par rapport à y et identifions la formule obtenue avec (2), on a donc

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xz + \frac{\partial k}{\partial y}(y,z) = xz$$

Ce qui implique que:

$$\frac{\partial k}{\partial y}(y,z) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad k(y,z) = l(z)$$

Avec l est une fonction en z.
Par suite

$$f(x,y,z) = xyz + l(z)$$

En dérivant cette formule par rapport à z, on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = xy + l'(z) = xy$$

Donc $l(z) = C$ *est une constante.*
Finalement, on obtient:

$$f(x,y,z) = xyz + C$$

b) ***En déduire une autre méthode pour calculer :*** $\boldsymbol{I = \int_H \omega}$

Comme $\omega = df$ *alors*

$$I = \int_H \omega = \int_H df = f\left(h\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - f(h(0)) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right) - f(1,0,0)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$

<u>Exercice 5</u>

Soit la forme différentielle suivante : $\omega = (1+y)dx + (2-x)dy$ *sur* $\mathbb{R}^2$.

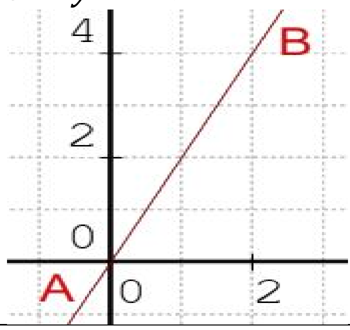
1) *On a*

$$\frac{\partial(1+y)}{\partial y} = 1 \quad et \quad \frac{\partial(2-x)}{\partial x} = -1$$

Donc ω *n'est pas fermée et par suite elle n'est pas exacte.*

2) *Calculons l'intégrale de* ω *du point* $A(0,0)$ *au point* $B(2,4)$ *le long des chemins suivants :*

   a- γ_1 *est la droite d'équation :* $y = 2x$.



Le chemin γ_1 *est définie paramétriquement par:*

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 2t \end{cases} \quad / \quad t \in [0,2]$$

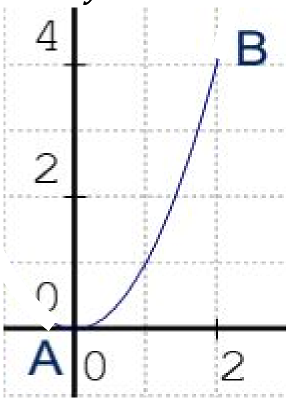
Par suite, l'intégrale de ω *suivant celui ci est*

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_0^2 \omega(\gamma_1(t))\gamma_1{}'(t)dt$$

$$= \int_0^2 \Big(\big(1 + y(t)\big)x'(t) + \big(2 - x(t)\big)y'(t)\Big)\,dt$$

$$= \int_0^2 \big((1 + 2t) + (2 - t).2\big)dt = \int_0^2 5dt = 10$$

b- γ_2 *est la parabole d'équation :* $y = x^2$.



Le chemin γ_2 *est définie paramétriquement par:*

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases} \quad / \quad t \in [0,2]$$

Par suite, l'intégrale de ω *suivant celui ci est*

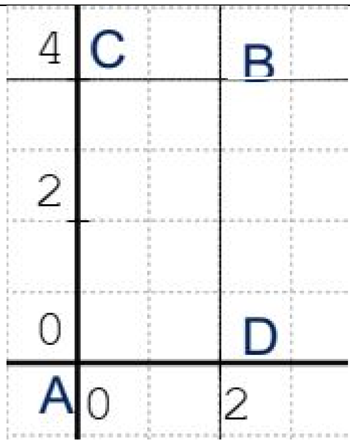
$$\int_{\gamma_2} \omega = \int_0^2 \omega(\gamma_2(t))\gamma_2{}'(t)dt$$

$$= \int_0^2 \Big(\big(1 + y(t)\big)x'(t) + \big(2 - x(t)\big)y'(t)\Big)\,dt$$

$$= \int_0^2 \big((1 + t^2) + (2 - t).2t\big)dt = \int_0^2 (1 + 4t - t^2)dt$$

$$= \left[t + 2t^2 - \frac{t^3}{3}\right]_0^2 = 2 + 8 - \frac{8}{3} = \frac{22}{3}$$

c- γ_3 *est la ligne brisée constituée des droites :* $x = 0$ *et* $y = 4$.



Pour la ligne brisée γ_3, elle est constituée des deux lignes AC et CB dont les représentations paramétriques

$$AC: \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = t \end{cases} \quad / \quad t \in [0,4] \quad et \quad CB: \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 4 \end{cases} \quad / \quad t \in [0,2]$$

Par suite,

$$\int_{\gamma_3} \omega = \int_{AC} \omega + \int_{CB} \omega$$
$$= \int_0^4 \big((1+t).0 + 2\big)dt + \int_0^2 \big((1+4) + (2-t).0\big)dt$$
$$= 8 + 10 = 18$$

Exercice 6

1- Considérons la forme différentielle suivante

$$\omega(x,y) = (1+2xy)dx + (x^3 - 3)dy$$

Comme

$$\frac{\partial(1+2xy)}{\partial y} = 2x \quad et \quad \frac{\partial(x^3-3)}{\partial x} = 3x^2$$

Alors ω n'est pas fermée et par suite elle n'est pas exacte.

Autrement dit, le champ de vecteurs $\vec{V}(x,y)$ n'est pas un champ de gradient.

2- Soit la forme différentielle α définie par

$$\alpha(x,y) = (3+2xy)dx + (x^2 - 3y^2)dy$$

On a

$$\frac{\partial(3+2xy)}{\partial y} = 2x = \frac{\partial(x^2-3y^2)}{\partial x}$$

Donc α est une forme différentielle fermée sur $D_\alpha = \mathbb{R}^2$ qui est un ouvert étoilé.

Par suite, d'après le théorème de poincaré, α est exacte.

On en déduit donc que le champ de vecteurs

$$\vec{F}(x,y) = (3+2xy, x^2 - 3y^2)$$

dérive d'un potentiel.

Pour déterminer ses potentiels, on résout le système aux dérivées partielles suivant:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3 + 2xy \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - 3y^2 \end{cases}$$

En intégrant la première équation par rapport à x, on trouve

$$f(x,y) = 3x + x^2y + k(y)$$

Avec k est une fonction en y.

Dérivons cette dernière formule par rapport à y et identifions la avec la deuxième équation du système:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + k'(y) = x^2 - 3y^2$$

On en déduit donc que

$$k'(y) = -3y^2 \quad \Leftrightarrow \quad k(y) = -y^3 + C$$

Où C *est une constante.*

Finalement, on aboutit à

$$f(x,y) = 3x + x^2y - y^3 + C$$

Ces fonctions sont les potentiels du champ vectoriel $\vec{F}(x,y)$*.*